Séminaire BOURBAKI Janvier 2012
64ème année, 2011-2012, n° 1048

MULTIZÊTAS, D'APRÈS FRANCIS BROWN

par **Pierre DELIGNE**

0. INTRODUCTION

Soient $k \geq 0$ et $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ une suite de k entiers ≥ 1. Le nombre multizêta $\zeta(\mathbf{s})$ est la somme itérée (l'appellation est expliquée en 1.1)

$$\zeta(\mathbf{s}) := \sum_{n_1 > \cdots > n_k > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}} \tag{0.1}$$

(somme sur les suites strictement décroissantes de k entiers > 0). Pour $k = 0$, cette définition donne $\zeta(\mathbf{s}) = 1$. Pour $k \geqslant 1$, la somme (0.1) converge si et seulement si $s_1 \geqslant 2$. Nous ne considérerons que les $\zeta(\mathbf{s})$ *convergents*, i.e. tels que (0.1) converge.

Le produit de deux nombres multizêtas est une combinaison linéaire à coefficients entiers de nombres multizêtas. Voir 3.6. Il revient donc au même de déterminer les relations polynomiales à coefficients rationnels entre les nombres multizêtas, ou de déterminer les relations $\mathbb{Q}$-linéaires entre eux.

Pour $k = 1$, les $\zeta(\mathbf{s})$ convergents sont les valeurs en les entiers $n \geqslant 2$ de la fonction ζ de Riemann. Euler a montré que pour n pair, $\zeta(n)$ est un multiple rationnel de π^n ([3]). Calculant $\zeta(3)$ avec 10 chiffres significatifs, il a aussi vérifié que $\zeta(3)$ n'était pas le produit de π^3 par un nombre rationnel de petit dénominateur. À la suite d'une correspondance avec Goldbach, Euler a étudié dans [4], pour $k = 2$, la variante des sommes (0.1) dans laquelle on somme sur $n_1 \geqslant n_2$: $\zeta_{\text{Euler}}(s_1, s_2) = \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_1 + s_2)$. Il prouve une série de relations $\mathbb{Q}$-linéaires entre nombres multizêtas, parmi lesquelles $\zeta(2, 1) = \zeta(3)$. Une de ses motivations était l'espoir d'obtenir des informations sur les valeurs de ζ en les entiers impairs $\geqslant 3$ (voir la fin de sa lettre à Goldbach du 5 janvier 1743).

Le problème de déterminer toutes les relations $\mathbb{Q}$-linéaires entre nombres multizêtas a deux aspects :

(A) À quelles relations faut-il s'attendre ? Les prouver.

(B) Prouver qu'il n'y en a pas d'autres.

L'évidence disponible, tant numérique que théorique, suggère que toute relation $\mathbb{Q}$-linéaire entre les $\zeta(\mathbf{s})$ est somme de relations *isobares*, i.e. entre $\zeta(\mathbf{s})$ de même *poids* $\sum s_i$. Si on se limite à ne considérer que les relations isobares, on ne sait rien sur le problème (B). Nous ne parlerons que de (A).

F. Brown a défini une classe de relations $\mathbb{Q}$-linéaires entre les $\zeta(\mathbf{s})$, les relations *motiviques*. Plus précisément, il définit une $\mathbb{Q}$-algèbre graduée $\mathcal{M}$, des éléments homogènes $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$ de $\mathcal{M}$, de degré le poids $\sum s_i$ de $\mathbf{s}$, et un homomorphisme real : $\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{real}(\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})) = \zeta(\mathbf{s})$. L'algèbre $\mathcal{M}$ est en tant qu'espace vectoriel engendrée par les $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$. Les *relations motiviques* entre $\zeta(\mathbf{s})$ sont celles qui proviennent de relations entre les $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$.

Une variante de la conjecture des périodes de Grothendieck implique que toute relation $\mathbb{Q}$-linéaire entre les $\zeta(\mathbf{s})$ est motivique. Cette prédiction a été vérifiée pour beaucoup des relations connues. Mise en garde : si certaines preuves de relations entre les $\zeta(\mathbf{s})$ sont faciles à relever en une preuve des mêmes relations entre les $\zeta^{\mathbf{m}}(s)$, c'est loin d'être toujours le cas.

Théorème 0.2 (F. Brown [1]). – *Les $\zeta^{\mathbf{m}}(s_1, \ldots, s_k)$ pour lesquels chaque s_i vaut 2 ou 3 forment une base de $\mathcal{M}$ sur $\mathbb{Q}$.*

Chaque $\zeta(\mathbf{s})$ peut donc être exprimé uniquement, de façon motivique, comme combinaison linéaire à coefficients rationnels de $\zeta(s_1, \ldots, s_k)$ avec $k \geqslant 0$ et chaque $s_i \in \{2, 3\}$. Malheureusement, la preuve de Brown ne fournit pas un algorithme, du moins pas un algorithme utilisable, pour trouver quelle est cette combinaison linéaire. Du théorème 0.2, F. Brown déduit que la catégorie des motifs de Tate mixte sur $\mathbb{Z}$ est engendrée par le groupe fondamental de $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$. Voir 7.18.

Certaines de nos notations diffèrent de celles de [1]. La correspondance entre les notations est involutive : $\zeta(s_1, \ldots, s_k)$ devient $\zeta(s_k, \ldots, s_1)$, la composition des chemins $\alpha\beta$ devient $\beta\alpha$, un monôme en les e_t (resp. une suite de 0 et 1) est à remplacer par le même, lu de droite à gauche, et e_1 est à remplacer par $-e_1$.

1. FORMULE INTÉGRALE

1.1. Soient $\omega_1, \ldots, \omega_N$ des 1-formes sur l'intervalle $[0, 1]$. L'*intégrale itérée* $It\!\int_0^1 \omega_1, \ldots, \omega_N$ est l'intégrale, sur le simplexe

$$\sigma_N := \{(t_1, \ldots, t_N) \mid 1 \geqslant t_1 \geqslant \cdots \geqslant t_N \geqslant 0\}, \tag{1.1.1}$$

contenu dans le cube $[0,1]^N$, de $\mathrm{pr}_1^*\omega_1 \wedge \mathrm{pr}_2^*\omega_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{pr}_N^*\omega_N$. Soit S l'opération qui à une 1-forme ω attache la fonction $S[\omega](t) := \int_0^t \omega$. L'intégrale itérée $It\!\int_0^1 \omega_1, \ldots, \omega_N$ peut être construite comme suit : appliquer S à ω_N, multiplier la fonction obtenue par ω_{N-1}, appliquer S, multiplier par $\omega_{N-2}, \ldots$, à la fin, évaluer en 1 :

$$It\!\int_0^1 \omega_1, \ldots, \omega_N = S[\omega_1.S[\omega_2.\ldots\; S[\omega_N]\cdots]](1). \tag{1.1.2}$$

C'est cette construction qui explique l'appellation « *intégrale itérée* ». Une somme telle que (0.1) admet une description analogue, en terme de l'opérateur $\sum$ qui à une fonction $f(n)$ $(n \geqslant 1)$ attache la fonction $\sum[f](n) := \sum_{m=1}^{n-1} f(m)$; ceci explique l'appellation de « *somme itérée* » donnée à (0.1).

Calculons ainsi l'intégrale itérée

$$It\!\int_0^1 \underbrace{\tfrac{dt}{t}, \ldots, \tfrac{dt}{t}}_{(s_1-1)\text{fois}}, \tfrac{dt}{1-t}, \underbrace{\tfrac{dt}{t}, \ldots, \tfrac{dt}{t}}_{(s_2-1)\text{fois}}, \tfrac{dt}{1-t}, \ldots, \underbrace{\tfrac{dt}{t}, \ldots, \tfrac{dt}{t}}_{(s_k-1)\text{fois}}, \tfrac{dt}{1-t}. \tag{1.1.3}$$

On a $\frac{dt}{1-t} = \sum_{n\geqslant 0} t^n dt$. Appliquant S terme à terme, on obtient $\sum_{n\geqslant 1} \frac{t^n}{n}$. Multipliant par $\frac{dt}{t}$ et appliquant S, on obtient $\sum_{n\geqslant 1} \frac{t^n}{n^2}$. Itérant (s_k-1) fois, on obtient $\sum_{n\geqslant 1} \frac{t^n}{n^{s_k}}$. Multipliant par $\frac{dt}{1-t} = \sum_{m\geqslant 0} t^m dt$ et appliquant S, on obtient

$$S\Big(\sum_{m\geqslant 0, n\geqslant 1} \frac{t^{m+n}}{n^{s_k}}\, dt\Big) = \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{t^{m+n}}{(m+n)n^{s_k}} = \sum_{m>n>0} \frac{t^m}{mn^{s_k}}\,.$$

Continuant ainsi, on obtient finalement la

Proposition 1.2. — *L'intégrale itérée* (1.1.3) *vaut* $\zeta(s_1, \ldots, s_k)$.

1.3. Alors que la notion de somme infinie est étrangère à la géométrie algébrique, l'étude d'intégrales de quantités algébriques en est une des sources. C'est grâce à la proposition 1.2 que la géométrie algébrique, plus précisément la théorie des motifs de Tate mixte, est utile à l'étude des nombres multizêtas.

2. GROUPE FONDAMENTAL PRO-UNIPOTENT ET COHOMOLOGIE

2.1. Nous aurons besoin d'une variante $\mathcal{Z}'$ de la série centrale descendante $\mathcal{Z}$ d'un groupe Γ. Pour chaque $i \geqslant 1$, $\Gamma/\mathcal{Z}^i$ est un groupe nilpotent. L'ensemble T_i de ses éléments de torsion est donc un sous-groupe. On définit $\mathcal{Z}'^i$ comme étant l'image inverse de T_i dans Γ. Ci-dessous, nous supposerons toujours Γ de génération finie. Cette hypothèse implique que les $\mathcal{Z}'^i/\mathcal{Z}'^{i+1}$ sont des groupes abéliens libres de type fini.

Supposons tout d'abord Γ nilpotent sans torsion, i.e. qu'il existe A tel que $\mathcal{Z}'^A = 0$. Pour chaque i ($1 \leqslant i < A$), choisissons une base de $\mathcal{Z}'^i/\mathcal{Z}'^{i+1}$ et relevons-la dans $\mathcal{Z}'^i$. Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_M$ les éléments de Γ obtenus, rangés dans un ordre quelconque, et soit $w(j)$ l'entier i tel que γ_j relève un élément d'une base de $\mathcal{Z}'^i/\mathcal{Z}'^{i+1}$. On vérifie par induction sur A que l'application

$$\mathbb{Z}^M \to \Gamma\colon\ \mathbf{n} \longmapsto \gamma_1^{n_1} \cdots \gamma_M^{n_M}$$

est bijective. Dans un tel « système de coordonnées », la loi de groupe de Γ est donnée par des polynômes à coefficients rationnels et à valeurs entières sur les entiers. Plus précisément, si la coordonnée d'indice j est vue comme étant de poids $w(j)$, la j-ième coordonnée de $\mathbf{m} \circ \mathbf{n}$ est un polynôme de poids $\leqslant w(j)$ en les m_k et n_l.

Les mêmes polynômes définissent un groupe algébrique unipotent sur $\mathbb{Q}$, l'*enveloppe unipotente* Γ^{un} de Γ. Le groupe $\Gamma^{\mathrm{un}}(\mathbb{Q})$ de ses points rationnels est $\mathbb{Q}^N$, muni de la loi de groupe donnée par les mêmes formules que celle de Γ. Le groupe $\Gamma^{\mathrm{un}}(\mathbb{Q})$ est la complétion de Malcev $\Gamma \otimes \mathbb{Q}$ de Γ.

Soient $\mathbb{Q}[\Gamma]$ l'algèbre de groupe de Γ, et I son idéal d'augmentation. Quillen a donné une description élégante de l'algèbre affine $\mathcal{O}(\Gamma^{\mathrm{un}})$ de Γ^{un} : c'est la limite inductive des duaux des $\mathbb{Q}[\Gamma]/I^N$. Plus précisément, l'inclusion de Γ dans $\mathbb{Q}[\Gamma]$ identifie le dual de $\mathbb{Q}[\Gamma]$ à l'espace des fonctions $\Gamma \to \mathbb{Q}$, et par cette identification le dual de $\mathbb{Q}[\Gamma]/I^{N+1}$ devient l'espace des polynômes en les n_j de poids $\leqslant N$.

Pour Γ de génération finie quelconque, ce qui précède s'applique aux $\Gamma/\mathcal{Z}'^i$, et on définit Γ^{un} comme étant le schéma en groupe limite projective des $(\Gamma/\mathcal{Z}'^i)^{\mathrm{un}}$. L'algèbre affine de Γ^{un} est encore la limite inductive des duaux des $\mathbb{Q}[\Gamma]/I^N$.

2.2. Soit E un espace topologique raisonnable, par exemple une variété algébrique complexe. On suppose E connexe. Un chemin γ de a à b : $[0,1] \to E$ fournit $\gamma^N\colon\ [0,1]^N \to E^N$ et, par restriction au simplexe σ_N de (1.1.1), une chaîne singulière de E^N qui est un cycle modulo la réunion des $b = x_1$, $x_1 = x_2, \ldots, x_N = a$. La classe d'homologie de ce cycle ne dépend que de la classe d'homotopie de γ.

Faisons $a = b$. Élaborant la construction précédente (cf. [2] §3), on obtient un isomorphisme de $\mathbb{Q}[\pi_1(E,a)]/I^{N+1}$ avec un groupe d'homologie relative de E^N et, de son dual $(\mathbb{Q}[\pi_1(E,a)]/I^{N+1})^\vee$ avec un groupe de cohomologie relative de E^N. De là, par passage à la limite inductive, une description cohomologique de l'algèbre affine de $\pi_1(E,a)^{\mathrm{un}}$.

Ne supposons plus que $a = b$. Soit $\pi_1(E; b, a)$ l'ensemble des classes d'homotopie de chemins de a à b. Le groupe $\pi_1(E, a)$ agit à droite, par composition des chemins, sur $\pi_1(E; b, a)$. Cette action fait de $\pi_1(E; b, a)$ un espace principal homogène, nous préférons dire *torseur*, sous $\pi_1(E, a)$. On note $\pi_1(E; b, a)^{\mathrm{un}}$ le $\pi_1(E, a)^{\mathrm{un}}$ torseur qui s'en déduit en poussant par $\pi_1(E, a) \to \pi_1(E, a)^{\mathrm{un}}$. Soit $\mathbb{Q}[\pi_1(E; b, a)]$ l'espace des combinaisons linéaires formelles d'éléments de $\pi_1(E; b, a)$. C'est un $\mathbb{Q}[\pi_1(E, a)]$-module à droite, libre de rang un. On pose

$$\mathbb{Q}[\pi_1(E; b, a)]/I^N := \mathbb{Q}[\pi_1(E; b, a)]/\mathbb{Q}[\pi_1(E; b, a)]I^N.$$

La construction qui précède fournit encore une description cohomologique des $(\mathbb{Q}[\pi_1(E; b, a)]/I^N)^\vee$, et de l'algèbre affine de $\pi_1(E; b, a)^{\mathrm{un}}$ qui en est la limite inductive.

2.3. Soit X une variété algébrique définie sur un sous-corps K de $\mathbb{C}$. La *cohomologie de Betti* $H^*_B(X)$ de X est la cohomologie rationnelle de l'espace $X(\mathbb{C})$ des points complexes de X, muni de sa topologie classique. Elle est munie de structures qui reflètent la structure algébrique de X. Notamment : une structure de Hodge mixte. On dispose aussi de la *cohomologie de de Rham* algébrique $H^*_{dR}(X)$. Si X est non singulière, $H^*_{dR}(X)$ est l'hypercohomologie du complexe de de Rham des faisceaux de formes différentielles algébriques. C'est un K-espace vectoriel, on dispose d'un isomorphisme de comparaison

$$\mathrm{comp}_{B,dR}\colon\ H^i_{dR}(X) \otimes_K \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^i_B(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}, \tag{2.3.1}$$

et les filtrations W et F de la structure de Hodge mixte de $H^i_B(X)$ proviennent de filtrations de $H^i_{dR}(X)$. Les coefficients de la matrice de l'isomorphisme (2.3.1), dans une base de $H^i_{dR}(X)$ et une de $H^i_B(X)$, portent le nom de *périodes*.

Grâce à 2.2, tout ceci s'applique aux algèbres affines des schémas en groupe $\pi_1(X, a)^{\mathrm{un}}$ ou de leurs espaces homogènes $\pi_1(X; b, a)^{\mathrm{un}}$. On écrira $\pi_1(X, a)_B$ pour $\pi_1(X, a)^{\mathrm{un}}$, $\pi_1(X, a)_{dR}$ pour sa variante de de Rham, et de même pour les $\pi_1(X; b, a)$. On mettra B/dR en indice quand l'énoncé vaut aussi bien en Betti qu'en de Rham.

2.4. Exemple. Prenons $K = \mathbb{Q}$ et soit X le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$, de groupe de points complexes $\mathbb{C}^*$. Ici, le groupe fondamental, commutatif, est indépendant du point-base et s'identifie au groupe d'homologie H_1. En de Rham, le dual H^1_{dR} de H^{dR}_1 est $\mathbb{Q}.\frac{dz}{z}$. En Betti, $H_1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z})$ est $\mathbb{Z}$, engendré par un tour positif autour de 0. Si on ne veut pas parler de « tour positif », i.e. choisir qui est i et qui est $-i$, il vaut mieux dire que $H_1 = \pi_1 = 2\pi i\mathbb{Z}$, avec $\ell \in 2\pi i\,\mathbb{Z}$ correspondant au lacet $\exp(\ell t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, sur lequel l'intégrale de $\frac{dz}{z}$ vaut ℓ.

Les $H_1^B(\mathbb{G}_m) = H_1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Q})$ et $H_1^{dR}(\mathbb{G}_m)$ sont les réalisations de Betti et de de Rham du *motif de Tate* $\mathbb{Q}(1)$ (voir §5). On a $\mathbb{Q}(1)_{dR} = \mathbb{Q}$ (1 étant dual de $\frac{dz}{z} \in H^1_{dR}(\mathbb{G}_m)$), et $\mathbb{Q}(1)_B$, inclus dans $\mathbb{Q}(1)_{dR} \otimes \mathbb{C}$ par $\mathrm{comp}_{dR,B}$, est $2\pi i\,\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}(1)$ est purement de type de Hodge $(-1,-1)$.

Le groupe algébrique $\pi_1(\mathbb{G}_m, 1)_{dR}$ est le groupe additif $\mathbb{G}_a$, de groupe de points rationnels $\mathbb{Q}(1)_{dR} = \mathbb{Q}$, et d'algèbre affine $\mathbb{Q}[T]$ (plus précisément : $\mathrm{Sym}^*(H^1_{dR}(\mathbb{G}_m))$). Le groupe algébrique $\pi_1(\mathbb{G}_m, 1)_B$ est le groupe additif de groupe de points rationnels $2\pi i\mathbb{Q}$. Algèbre affine : $\mathrm{Sym}^*(H^1_B(\mathbb{G}_m))$. C'est l'algèbre des fonctions f sur $2\pi i\mathbb{Z}$, à valeurs rationnelles, et telles que si on identifie $2\pi i\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z}$ par $n \mapsto 2\pi i n$, les conditions équivalentes suivantes soient vérifiées pour N assez grand : (a) f est un polynôme de degré $< N$; (b) notant Δ l'opérateur $g \mapsto (g(n+1) - g(n))$, on a $\Delta^N f = 0$; (c) la forme linéaire sur l'algèbre de groupe $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}]$ définie par f est nulle sur I^N.

Par abus de langage, nous écrirons parfois $\mathbb{Q}(1)_{B/dR}$ pour ces groupes algébriques.

3. LE CAS DE $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$

3.1. Si X est le complément dans $\mathbb{P}^1$ d'un ensemble fini T de points rationnels, la variété X est définie sur $\mathbb{Q}$ et les structures de Hodge mixte de 2.2, 2.3 sont de Hodge-Tate : Gr_n^W est nul pour n impair, et pour $n = 2m$ est purement de type de Hodge (m, m). Pour chacun des groupes M considérés en 2.2, soit M_{dR} sa variante de de Rham (2.3). Après renumérotation, les filtrations par le poids W et de Hodge F de M_{dR} sont opposées. Elles définissent la graduation de M_{dR} pour laquelle

$$W_{-2n}(M_{dR}) = \bigoplus_{m \geqslant n} M_{dR}^m \tag{3.1.1}$$
$$F^{-p}(M_{dR}) = \bigoplus_{m \leqslant p} M_{dR}^m\,.$$

La convention (3.1.1) assure que $\mathbb{Q}(1)_{dR}$ est de degré un. Il est parfois commode de graduer par l'opposé du degré, le *codegré*, et de poser $(M_{dR})_m := (M_{dR})^{-m}$.

Cas particulier : l'algèbre affine de $\pi_1(X; b, a)_{dR}$ est graduée. Elle est à degrés $\leqslant 0$ et réduite à $\mathbb{Q}$ en degré 0. Le morphisme d'augmentation $\mathcal{O}(\pi_1(X; b, a)_{dR}) \to \mathbb{Q}$ est un point ${}_b1_a$ de $\pi_1(X; b, a)_{dR}$. En dR, on dispose ainsi d'un chemin canonique ${}_b1_a$ d'un point-base à un autre : pour un certain schéma en groupe pro-unipotent Π, chaque $\pi_1(X; b, a)_{dR}$ s'identifie à une copie ${}_b\Pi_a$ de Π, et la composition des chemins est la loi de groupe.

Le groupe Π admet la description suivante. Soit $\mathcal{L}$ l'algèbre de Lie sur $\mathbb{Q}$ engendrée par des éléments e_t ($t \in T$) soumis à la seule relation $\sum e_t = 0$. On la munit de la graduation pour laquelle chaque e_t est homogène de degré 1. La série centrale descendante $\mathcal{Z}$ est la filtration par les « degrés $\geqslant i$ ». Soient $\mathcal{L}^\wedge$ le complété de $\mathcal{L}$ pour cette filtration, et $\exp(\mathcal{L}/\mathcal{Z}^i)$ le groupe algébrique unipotent d'algèbre de Lie $\mathcal{L}/\mathcal{Z}^i$. On a

$$\Pi = \exp(\mathcal{L}^\wedge) := \lim \exp(\mathcal{L}/\mathcal{Z}^i). \tag{3.1.2}$$

Autre description : l'algèbre enveloppante A de $\mathcal{L}$ est l'algèbre associative engendrée par des éléments e_t ($t \in T$) soumis à la seule relation $\sum e_t = 0$. Elle est graduée, chaque e_t étant homogène de degré un, et la puissance N-ième de l'idéal d'augmentation I est la partie de A de degré $\geqslant N$. Le complété $A^\wedge = \lim A/I^N$ de A est muni d'un coproduit

$$\Delta\colon\ A^\wedge \to A^\wedge \widehat{\otimes} A^\wedge\colon\ e_t \longmapsto e_t \otimes 1 + 1 \otimes e_t,$$

$\mathcal{L}^\wedge$ est l'algèbre de Lie des éléments primitifs, et pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R, si on pose $A^\wedge \widehat{\otimes} R := \lim_N (A/I^N) \otimes_{\mathbb{Q}} R$, le groupe $\Pi(R)$ des R-points de Π est le groupe des *éléments groupaux* de $(A^\wedge \widehat{\otimes} R)^*$:

$$\Pi(R) = \{g \in (A^\wedge \widehat{\otimes} R)^* \mid \Delta g = g \otimes g\}. \tag{3.1.3}$$

L'algèbre affine $\mathcal{O}(\Pi)$ de Π (munie de la topologie discrète) et l'algèbre enveloppante complétée $A^\wedge$ (munie de sa topologie de limite projective) sont duales l'une de l'autre. Le dual topologique de $A^\wedge$ s'identifie au dual gradué $\oplus (A^n)^\vee$ de A, et ceci donne la graduation (à degrés $\leqslant 0$) de $\mathcal{O}(\Pi)$.

On notera ω la 1-forme logarithmique sur X à valeurs dans $\mathcal{L}$

$$\omega := \sum_{t \neq \infty} e_t \frac{dz}{z - t}. \tag{3.1.4}$$

En chaque $t \in T$, elle a le résidu e_t.

Supposons que $\infty \in T$ et posons $T' := T - \{\infty\}$. On a $A = \mathbb{Q}\langle (e_t)_{t \in T'} \rangle$ et $A^\wedge = \mathbb{Q} \ll (e_t)_{t \in T'} \gg$ (séries formelles associatives en les e_t). Pour tout mot $w = t_1 \cdots t_k$ en l'alphabet T', notons $c(w)$ la forme linéaire sur $A^\wedge$ « coefficient du monôme $e_{t_1} \cdots e_{t_k}$ ». On note encore $c(w)$ la restriction de $c(w)$ à $\Pi \subset A^{\wedge *}$, et pour une combinaison linéaire formelle de mots, on pose $c\left(\sum \lambda_w w\right) = \sum \lambda_w c(w)$. Les $c(w)$ forment une base vectorielle de $\mathcal{O}(\Pi)$. Le produit dans $\mathcal{O}(\Pi)$ correspond au produit de mélange des mots :

$$c(w')c(w'') = c(w' \mathbin{ш} w'') \tag{3.1.5}$$

où, pour $w' = t_1 \cdots t_k$ et $w'' = t_{k+1} \cdots t_{k+\ell}$, $w' \mathbin{ш} w''$ est la somme des $t_{\sigma^{-1}(1)} \cdots t_{\sigma^{-1}(k+\ell)}$ pour σ parcourant l'ensemble $S_{k,\ell}$ des permutations de $\{1, \ldots, k + \ell\}$ croissantes sur $\{1, \ldots, k\}$ et sur $\{k + 1, \ldots, k + \ell\}$ (shuffle product).

3.2. Un chemin γ de a à b définit un point rationnel de $\pi_1(X;b,a)_B = \pi_1(X(\mathbb{C});b,a)^{\mathrm{un}}$. Soit $\mathrm{comp}_{dR,B}(\gamma)$ l'image de ce point rationnel par l'isomorphisme de comparaison

$$\mathrm{comp}_{dR,B}\colon\ \pi_1(X;b,a)_B(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X;b,a)_{dR}(\mathbb{C}) = \Pi(\mathbb{C}).$$

Cette image est obtenue par « intégration » le long de γ, dans le groupe non commutatif Π, de la forme ω : c'est la valeur en 1 de la solution $g\colon\ [0,1] \to \Pi(\mathbb{C})$, valant 1 en 0, de

$$dg(t).g(t)^{-1} = \omega\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) dt. \tag{3.2.1}$$

3.3. Le même formalisme s'applique quand on permet aux points-base a, b d'être des points-base tangentiels (vecteur tangent non nul en un « point rationnel à l'infini » $t \in T$ de X). Soit Θ_t l'espace tangent à $\mathbb{P}^1$ en t, $\Theta_t^* := \Theta_t - \{0\}$, et $a \in \Theta_t^*$ un point-base tangentiel en t. Tout se passe comme si on disposait d'un morphisme de Θ_t^* dans X : on dispose de morphismes

$$\pi_1(\Theta_t^*, a)_{B/dR} = \mathbb{Q}(1)_{B/dR} \to \pi_1(X,a)_{B/dR} \tag{3.3.1}$$

compatibles aux isomorphismes de comparaison. Côté Betti, ce morphisme est induit par les germes d'applications φ de $(\Theta_t, 0)$ dans $(\mathbb{P}^1, t)$ de différentielle l'identité. L'espace de ces germes est contractile, et chaque φ induit une application d'un petit disque épointé autour de 0 (homotope à Θ_t^*) dans X. En de Rham, et après passage aux algèbres de Lie (3.3.1) est le morphisme de $\mathbb{Q}(1)_{dR} = \mathbb{Q}$ dans $\mathcal{L}^\wedge$ qui envoie 1 sur e_t.

La $\mathbb{Q}$-forme $\pi_1(X;b,a)_B$ de $\Pi(\mathbb{C})$ est caractérisée par la propriété que les images des chemins de a à b sont des points rationnels.

Mise en garde : $\pi_1(X;b,a)_{dR}$ est indépendant de a et b, et $\pi_1(X;b,a)_B$ est localement constant en a et b, mais l'isomorphisme de comparaison entre leurs complexifiés n'est pas localement constant. Que $\pi_1(X;b,a)_{dR}$ soit indépendant de a et b provient de ce qu'on dispose du chemin dR canonique ${}_b1_a$ entre deux points-base quelconques. L'image de ce chemin par $\mathrm{comp}_{B,dR}$ n'est pas localement constante.

3.4. Le cas qui nous intéresse est celui où $X = \mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ et où comme points-base on prend les points-base tangentiels 1 en 0 et -1 en 1. Ils seront notés 0 et 1. On a ici

$$\omega = e_0\,\frac{dz}{z} + e_1\,\frac{dz}{z-1}$$

et pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R, $\Pi(R) = \{$éléments groupaux de $R\ll e_0, e_1\gg^*\}$ (3.1.3). En Betti, on dispose du « droit chemin » dch de 0 à 1. On notera encore dch son image par $\mathrm{comp}_{dR,B}$ dans $\Pi(\mathbb{C})$. Cette image est la limite suivante pour $\varepsilon, \eta \to 0$ par valeurs > 0 :

$$\text{(3.4.1)} \qquad \mathrm{comp}_{dR,B}(\mathrm{dch}) = \lim \exp(-\log \eta . e_1)\mathrm{comp}_{dR,B}([\varepsilon, 1-\eta]) \exp(\log \varepsilon . e_0).$$

Le troisième (resp. premier) facteur doit être vu comme calculant, dans l'espace tangent épointé en 0 (resp. en 1), $\mathrm{comp}_{dR,B}([1,\varepsilon])$ (resp. $\mathrm{comp}_{dR,B}([-\eta,-1])$, la forme ω étant remplacée par $\frac{du}{u}\, e_0$ (resp. $\frac{du}{u}\, e_1$).

On peut en général exprimer la solution de (3.2.1) comme une somme d'intégrales itérées. Appliquant 1.2, on obtient que pour $\zeta(s_1, \ldots, s_k)$ convergent, on a :

Proposition 3.5. — *Le coefficient de* $e_0^{s_1-1}e_1 \cdots e_0^{s_k-1}e_1$ *dans* $\mathrm{dch} \in \Pi(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}\ll e_0, e_1 \gg^*$ *est* $(-1)^k \zeta(s_1, \ldots, s_k)$.

Cette proposition ne détermine les coefficients de monômes $c(w)$ de dch que pour w un mot en l'alphabet $\{0,1\}$ qui ne commence pas par 1 et ne finit pas par 0. Les coefficients $c(0)$ de e_0 et $c(1)$ de e_1 dans dch sont nuls. Ceci, joint au fait que dch est groupal, détermine les coefficients manquants. Plus précisément, la nullité de $c(0)$ et $c(1)$ signifie que dch appartient au groupe dérivé Π' de Π, d'algèbre de Lie graduée la partie de degré $\geqslant 2$ de celle de Π. Sur Π', on a, notant ${}^{\{p\}}$ une puissance dans le monoïde des mots,

$$\text{(3.5.1)} \qquad c(0^{\{p\}}) = c(1^{\{p\}}) = 0 \quad \text{pour} \quad p > 0$$

et, appliquant (3.1.5) à $w10^{\{p-1\}}$ et 0 (resp. 1 et $1^{\{p-1\}}0w$), on vérifie par récurrence sur $p \geqslant 0$ que

$$\text{(3.5.2)} \qquad \begin{aligned} & c(w10^{\{p\}}) = (-1)^p c((w \,ш\, 0^{\{p\}})1) \\ (\text{resp.} \quad & c(1^{\{p\}}0w) = (-1)^p c(0(1^{\{p\}} \,ш\, w)) \qquad (\text{sur } \Pi'). \end{aligned}$$

3.6. L'identité (3.1.5), évaluée en dch, exprime le produit de deux nombres multizêtas comme combinaison linéaire à coefficients entiers de nombres multizêtas.

4. LES MULTIZÊTAS MOTIVIQUES

4.1. Continuons à poser $X := \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ et à prendre pour points-base les points-base tangentiels 0 ou 1 (voir 3.4). Nous donnerons en 5.6 un sens précis à l'expression « structure motivique sur les algèbres affines des $\pi_1(X; b, a)_{B/dR}$ ». Nous dirons aussi « structure motivique sur les $\pi_1(X; b, a)_{B/dR}$ ». Heuristiquement, il s'agit de structures provenant de la géométrie, ayant donc un sens tant pour Betti que pour de Rham, et respectées par les isomorphismes de comparaison. Exemples : le produit donnant la structure d'algèbre, les coproduits provenant de la composition des chemins, la filtration par le poids, l'isomorphisme $\pi_1(X; b, a)_{B/dR} \to \pi_1(X; \sigma(b), \sigma(a))_{B/dR}$ induit par l'involution $\sigma\colon\ x \mapsto 1 - x$ de $\mathbb{P}^1$. De même, les morphismes (3.3.1) sont une structure motivique sur $\mathbb{Q}(1)_{B/dR}$ et $\pi_1(X, a)_{B/dR}$. Par contre, ni la filtration de Hodge de l'algèbre affine de $\pi_1(X; b, a)_{dR}$, ni donc sa graduation, ni l'indépendance de $\pi_1(X; b, a)_{dR}$ de a et b ne sont motiviques. On n'en dispose que pour dR. Les structures en question seront des structures d'algèbre multilinéaire. Soit H_B (resp. H_{dR}) le schéma en groupe sur $\mathbb{Q}$ des automorphismes de $\pi_1(X; 1, 0)_B$ (resp. $\pi_1(X; 1, 0)_{dR}$) respectant toutes ses structures motiviques. La filtration par le poids W de l'algèbre affine est une filtration par des sous-espaces de dimension finie, et H_B (resp. H_{dR}) est une limite projective de sous-groupes algébriques des $\mathrm{GL}(W_i)$.

4.2. Soit $P_{dR,B}$ le schéma des isomorphismes de $\pi_1(X; 1, 0)_B$ avec $\pi_1(X; 1, 0)_{dR}$ respectant toutes les structures motiviques. Le groupe H_B agit à droite sur $P_{dR,B}$. L'isomorphisme de comparaison $\mathrm{comp}_{dR,B}$ est un point complexe de $P_{dR,B}$. Le schéma $P_{dR,B}$ est donc non vide. C'est un H_B-torseur (terminologie de 2.2).

Si Z_B est un sous-schéma de $\pi_1(X; 1, 0)_B$ stable sous H_B, la torsion par le H_B-torseur $P_{dR,B}$ transforme $\pi_1(X; 1, 0)_B$ en $\pi_1(X; 1, 0)_{dR} = {}_1\Pi_0$ (notations de 3.1), et Z_B en un sous-schéma Z_{dR} de ${}_1\Pi_0$. Sur $\mathbb{C}$, $Z_{dR}(\mathbb{C})$ est l'image de $Z_B(\mathbb{C})$ par $\mathrm{comp}_{dR,B}$.

J'aime penser à la H_B-orbite de dch comme étant l'espace des points ch de $\pi_1(X; 1, 0)_B$ ayant toutes les propriétés de dch exprimables en termes motiviques. Par exemple : le morphisme $\pi_1(X; 1, 0)_B \to \pi_1(X; 0, 1)_B$ induit par l'involution $x \mapsto 1 - x$ de $\mathbb{P}^1$ doit transformer ch en son inverse.

Soit $\mathbf{M}_B \subset \pi_1(X; 1, 0)_B$ l'adhérence de la H_B-orbite de dch. Le tordu de $\mathbf{M}_B$ par $P_{dR,B}$ est un sous-schéma fermé $\mathbf{M}_{dR}$ de ${}_1\Pi_0$. Notons encore dch l'image de dch par $\mathrm{comp}_{dR,B}$. C'est un point complexe de $\mathbf{M}_{dR}$, et $\mathbf{M}_{dR}(\mathbb{C}) \subset {}_1\Pi_0(\mathbb{C})$ est l'adhérence de sa $H_{dR}(\mathbb{C})$-orbite.

DÉFINITION 4.3. — *Soit* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$. *Si* $k \neq 0$, *on suppose que* $s_1 \geqslant 2$. *Soient* w *le mot* $0^{\{s_1-1\}}1 \cdots 0^{\{s_k-1\}}1$ *en l'alphabet* $\{0, 1\}$ *et* $c(w) \in \mathcal{O}(\Pi)$ *la fonction « coefficient du monôme* $e_0^{s_1-1}e_1 \cdots e_0^{s_k-1}e_1$ *» (3.1). On note* $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$ *la restriction à* $\mathbf{M}_{dR}$ *de* $(-1)^k c(w)$.

Les $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$ sont les *multizêtas motiviques* (F. Brown [1] 2.3). L'algèbre notée $\mathcal{M}$ dans l'introduction est $\mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR})$. Avant [1], seule la restriction des $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$ à l'orbite de 1 était considérée. Ceci donnait lieu à des contorsions pénibles. D'après 3.5, la valeur de $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$ en le point complexe dch de $\mathbf{M}_{dR}$ est $\zeta(\mathbf{s})$. Toute identité polynomiale à coefficients rationnels en les $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$ fournit donc par évaluation en dch une relation polynomiale entre les $\zeta(\mathbf{s})$. Le yoga des périodes de Grothendieck prédit que toute relation polynomiale entre les $\zeta(\mathbf{s})$ provient de la géométrie. Plus précisément, qu'elle est obtenue comme ci-dessus.

Pour tout mot w en 0 et 1, notons de même $c_{\mathbf{m}}(w)$ la restriction de $c(w)$ à $\mathbf{M}_{dR}$. S'appuyant sur la remarque qui suit 3.5, on peut montrer que les $c_{\mathbf{m}}(w)$ sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$.

Par construction, H_{dR} agit sur $\mathbf{M}_{dR}$. Son algèbre de Lie agit donc par dérivations sur l'algèbre affine de $\mathbf{M}_{dR}$, quotient de celle de Π. Ces dérivations, qui n'ont de sens qu'une fois qu'on est remonté des $\zeta(\mathbf{s})$ aux $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$, joueront un rôle-clé dans les arguments de F. Brown.

5. MOTIFS DE TATE MIXTE

5.1. Nous sommes ici dans l'un des cas où la philosophie des motifs est non seulement un guide précieux, mais permet des démonstrations. Sur tout corps K, Voevodsky a défini une catégorie triangulée motivique $\mathcal{V}_K$, munie d'un produit tensoriel, et contenant des objets de Tate $\mathbb{Z}(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$). Si K est un corps de nombres, on peut après tensorisation avec $\mathbb{Q}$ construire une sous-catégorie $MT(K)$ de $\mathcal{V}_K \otimes \mathbb{Q}$, la *catégorie des motifs de Tate mixte* sur K et cette catégorie est tannakienne. Ceci repose sur notre connaissance des groupes de K-théorie d'un corps de nombres, due à la détermination par voie transcendante des $H^i(BGL(n,K),\mathbb{C})$ pour $n \gg i$.

Tout ceci est pour moi une boîte noire. Elle est difficile à ouvrir et c'est pourquoi les identités promises par 0.2. ne sont pas explicites.

5.2. Passons en revue quelques propriétés de la catégorie $MT(K)$. C'est une catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}$. Elle contient un objet de rang un $\mathbb{Q}(1)$, le *motif de Tate*. Ce motif étant de rang un, $\mathbb{Q}(n) := \mathbb{Q}(1)^{\otimes n}$ est défini pour $n \in \mathbb{Z}$. Les objets de $MT(K)$ sont munis d'une filtration finie croissante fonctorielle et compatible au produit tensoriel, la *filtration par le poids* W. Elle est indexée pas les entiers pairs. Le foncteur $M \mapsto Gr^W(M)$ est exact, et $\mathrm{Gr}^W_{-2n}(M)$ est somme de copies de $\mathbb{Q}(n)$.

Supposons pour simplifier que $K = \mathbb{Q}$. On dispose alors de *foncteurs fibres de Betti* et *de de Rham*

$$\omega_B, \omega_{dR} \colon\ MT(K) \to \mathbb{Q}\text{-espaces vectoriels}$$

et d'un isomorphisme de comparaison

$$\mathrm{comp}_{dR,B} \colon\ \omega_B \otimes \mathbb{C} \to \omega_{dR} \otimes \mathbb{C}.$$

Noter que, parce que $K = \mathbb{Q}$, le foncteur fibre ω_{dR} coïncide avec le foncteur fibre ω de [2]. Pour le motif $\mathbb{Q}(1)$, $\omega_B(\mathbb{Q}(1))$, $\omega_{dR}(\mathbb{Q}(1))$ et $\mathrm{comp}_{dR,B}$ sont comme en 2.4.

Le foncteur ω_{dR} est muni d'une *filtration de Hodge* F, opposée, à une renumérotation près, à la *filtration par le poids* de $\omega_{dR}(M)$ par les $\omega_{dR}(W_{2n}M)$. Ceci en fait un foncteur gradué, comme en 3.1.

5.3. Si $\mathcal{T}$ est une catégorie tannakienne, nous appellerons $\mathcal{T}$-*algèbre* un Ind-objet A de $\mathcal{T}$, muni d'un produit $A \otimes A \to A$. On définit la catégorie des $\mathcal{T}$-schémas affines comme étant l'opposée de celle des $\mathcal{T}$-algèbres commutatives à unité, et un $\mathcal{T}$-schéma en groupe affine comme un groupe dans cette catégorie. Pour $\mathcal{T}$ une catégorie de motifs, on remplace le préfixe $\mathcal{T}$ par l'adjectif *motivique*.

5.4. Les $\pi_1(X; b, a)_B$, $\pi_1(X; b, a)_{dR}$ de 3.1, 3.3 et l'isomorphisme de comparaison entre leurs complexifiés sont motiviques : images d'un schéma en groupe motivique $\pi_1(X; b, a)_{\mathrm{mot}}$ ([2] §4). Les morphismes « composition des chemins » et (3.3.1) sont eux aussi motiviques.

Si $X = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ et que a, b sont choisis parmi les points-base tangentiels 0, 1 de 3.4, les points 0, 1, ∞ restent distincts après réduction modulo p, et les vecteurs tangents choisis en 0 et 1 restent non nuls. On peut en déduire que les algèbres affines $\mathcal{O}(\pi_1(X; b, a)_{\mathrm{mot}})$ sont des Ind-objets d'une sous-catégorie tannakienne $MT(\mathbb{Z})$ de $MT(\mathbb{Q})$, celle des *motifs de Tate mixte à bonne réduction sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ([2] 1.7, 1.4, 1.8). Dans $MT(\mathbb{Z})$,

$$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) \text{ est } \begin{cases} \text{de dimension un sur } \mathbb{Q} \text{ pour } n \text{ impair} \geqslant 3, \\ 0 \text{ sinon;} \end{cases} \tag{5.4.1}$$

$$\mathrm{Ext}^2(\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(n)) = 0\ . \tag{5.4.2}$$

5.5. Soient $\mathcal{T}$ une catégorie tannakienne sur un corps K, et ω un foncteur fibre sur une extension K' de K. La famille des $\omega(Y)$, pour Y dans $\mathcal{T}$, munie des $\omega(f) : \otimes\, \omega(Y_i) \to \otimes\, \omega(Z_j)$ pour $f : \otimes Y_i \to \otimes Z_j$ un morphisme de $\mathcal{T}$, est une famille de K'-espaces vectoriels, munie d'une structure d'algèbre multilinéaire. Le sous-schéma en groupe de $\Pi\, \mathrm{GL}(\omega(Y))$ (produit sur $\mathrm{Ob}(\mathcal{T})$) qui respecte cette structure est le schéma en groupe $\mathit{Aut}(\omega)$ des automorphismes du foncteur fibre ω. On le note $\pi(\mathcal{T}, \omega)$ et on l'appelle *groupe fondamental* de $\mathcal{T}$ en ω. On verra sur des exemples qu'il est de « même nature » que les $\omega(Y)$, par exemple que son algèbre affine est graduée si le foncteur ω est gradué. L'explication de ce fait est qu'il existe un $\mathcal{T}$-schéma en groupe $\pi(\mathcal{T})$, agissant fonctoriellement sur chaque objet de $\mathcal{T}$, tel que pour tout foncteur fibre ω, $\pi(\mathcal{T}, \omega)$ soit $\omega(\pi(\mathcal{T}))$.

Supposons que $K' = K$. Dans ce cas, ω induit une équivalence de $\mathcal{T}$ avec la catégorie des représentations linéaires de dimension finie de $\pi(\mathcal{T}, \omega)$. Si $\mathcal{T}$ est une catégorie de motifs, les groupes fondamentaux s'appellent aussi *groupes de Galois motiviques.*

5.6. Soit $\langle (Y_i) \rangle$ la sous-catégorie tannakienne de $\mathcal{T}$ engendrée (par sous-quotients, sommes, duaux et produits tensoriels) par une famille (Y_i) d'objets de $\mathcal{T}$. Une $\mathcal{T}$-*structure* sur la famille des $\omega(Y_i)$ est l'image par ω d'un morphisme de $\langle (Y_i) \rangle$. Plus précisément c'est la donnée de l'image par ω de sous-quotients de sommes de produits tensoriels de Y_i et $Y_i^\vee$, et de morphismes entre de tels sous-quotients. Si $\mathcal{T}$ est une catégorie de motifs, on dira plutôt *structure motivique.* Le sous-groupe de $\Pi \, \mathrm{GL}(\omega(Y_i))$ qui respecte toutes les $\mathcal{T}$-structures est donc le groupe fondamental de $\langle (Y_i) \rangle$ en ω. Tout sous-groupe algébrique d'un groupe $\mathrm{GL}(V)$ est le sous-groupe respectant quelques sous-espaces et éléments dans des espaces de tenseurs sur V. L'équivalence 5.5 assure donc que ce groupe fondamental de $\langle (Y_i) \rangle$ en ω est le quotient de $\pi(\mathcal{T}, \omega)$ qui agit fidèlement sur la famille des $\omega(Y_i)$. Même terminologie si on part d'une famille de ind-objets de $\mathcal{T}$: on la remplace par la famille des sous-objets dans $\mathcal{T}$.

Prenons $\mathcal{T} := MT(\mathbb{Z})$. Avec la notation B/dR de 2.3, posons

$$G_{B/dR} := \pi(MT(\mathbb{Z}), \omega_{B/dR}). \tag{5.6.1}$$

Le schéma en groupe $H_{B/dR}$ des automorphismes de $\pi_1(X; 1, 0)_{B/dR}$ « respectant toutes les structures motiviques » considéré en 4.1 est le quotient de $G_{B/dR}$ agissant fidèlement sur $\pi_1(X; 1, 0)_{B/dR} = \omega_{B/dR}(\pi_1(X; 1, 0)_{\mathrm{mot}})$. D'après l'équivalence 5.5, un sous-schéma fermé de $\pi_1(X; 1, 0)_B$ stable sous H_B est la réalisation de Betti d'un sous-schéma fermé de $\pi_1(X; 1, 0)_{\mathrm{mot}}$. Exemple : il existe un unique sous-schéma motivique $\mathbf{M}_{\mathrm{mot}}$ de $\pi_1(X; 1, 0)_{\mathrm{mot}}$ de réalisation de Betti l'adhérence d'orbite $\mathbf{M}_B$; le sous-schéma $\mathbf{M}_{dR}$ (4.2) de $\pi_1(X; 1, 0)_{dR}$ est sa réalisation de de Rham.

5.7. L'action de $G_{B/dR}$ sur $\mathbb{Q}(1)_{B/dR}$ définit un morphisme t de $G_{B/dR}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$. Pour tout M dans $MT(\mathbb{Z})$, $G_{B/dR}$ respecte la filtration par le poids de $\omega_{B/dR} M$, et, puisque $\mathrm{Gr}^W_{-2n}(M)$ est somme de copies de $\mathbb{Q}(n)$, l'action de g dans $G_{B/dR}$ sur $\mathrm{Gr}^W_{-2n}(M)$ est la multiplication par $t(g)^n$. Le noyau $U_{B/dR}$ de t agit donc trivialement sur les $\mathrm{Gr}^W_{-2n}(M)$: c'est un schéma en groupe pro-unipotent.

Soit $\tau(\lambda)$ la multiplication par λ^n sur $\omega^n_{dR}(M)$. Les $\tau(\lambda)$ définissent une section $\tau \colon \mathbb{G}_m \to G_{dR}$ de t, qui fait de G_{dR} un produit semi-direct $\mathbb{G}_m \ltimes U_{dR}$. L'action de $\mathbb{G}_m$ sur U_{dR} (par automorphismes intérieurs dans G_{dR}) sera encore notée τ. Elle permet de définir l'algèbre de Lie graduée $\mathrm{Lie}^{\mathrm{gr}}(U_{dR})$. La nullité (5.4.2) implique que cette algèbre de Lie graduée est libre, et (5.4.1) qu'elle est librement engendrée par un générateur en chaque degré impair $\geqslant 3$. Le foncteur ω_{dR} induit une équivalence de catégories de $MT(\mathbb{Z})$ avec la catégorie des espaces vectoriels gradués de dimension finie, munis d'une action, compatible aux graduations et donc nilpotente, de $\mathrm{Lie}^{\mathrm{gr}}(U_{dR})$.

5.8. Soit P le schéma des isomorphismes de foncteurs fibres de ω_{dR} avec ω_B. L'isomorphisme de comparaison $\mathrm{comp}_{B,dR}$ est un point complexe de P. Le schéma P est donc non vide, et est un G_{dR}-torseur. Le groupe G_{dR} étant extension de $\mathbb{G}_m$ par U_{dR}, un argument de cohomologie galoisienne montre que tout G_{dR}-torseur a un point rationnel : il existe un isomorphisme de foncteurs fibres $p\colon\ \omega_{dR} \to \omega_B$. Écrivons

$$p = \mathrm{comp}_{B,dR} \cdot a \tag{5.8.1}$$

avec $a \in G_{dR}(\mathbb{C})$. Il résulte de (5.8.1) que pour tout M dans $MT(\mathbb{Z})$, si on identifie $\omega_{dR}(M) \otimes \mathbb{C}$ à $\omega_B(M) \otimes \mathbb{C}$ par $\mathrm{comp}_{B,dR}$, $\omega_B(M) \subset \omega_B(M) \otimes \mathbb{C} = \omega_{dR}(M) \otimes \mathbb{C}$ vérifie

$$\omega_B(M) = a(\omega_{dR}(M)). \tag{5.8.2}$$

Puisque $\omega_B(\mathbb{Q}(1)) = 2\pi i\mathbb{Q}$, on a $t(a) \in 2\pi i\mathbb{Q}^*$, et $a = u\tau(\lambda)$ avec $u \in U_{dR}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in 2\pi i\mathbb{Q}^*$. Une compatibilité à la conjugaison complexe permet de montrer qu'on peut choisir ([2] 2.12)

$$a \in U_{dR}(\mathbb{R}).\tau(2\pi i). \tag{5.8.3}$$

6. L'ESPACE $\widetilde{\mathcal{H}}(2,3)$ DE FONCTIONS SUR $\pi_1(X;1,0)_{dR}$

Dorénavant, $X := \mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}$, et les notations de 3.4 sont en vigueur. Par abus de langage, notons $\mathbb{Q}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ (resp. $\mathbb{Q}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle^*$) le schéma en groupe sur $\mathbb{Q}$ tel que, pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R, l'ensemble de ses R-points soit $R\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ (resp. $R\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle^*$). Rappelons que $\pi_1(X;b,a)_{dR}$ est une copie ${}_b\Pi_a$ du sous-schéma en groupe Π des éléments groupaux (3.1.3) de $\mathbb{Q}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle^*$. On la regardera comme contenue dans une copie $\mathbb{Q}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle_{b,a}$ de $\mathbb{Q}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$. Un point x de $\mathbb{Q}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$, sera parfois noté ${}_bx_a$ quand regardé comme appartenant à cette copie.

6.1. En tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, l'algèbre affine $\mathcal{O}(\Pi)$ de Π a pour base les « coefficients de monômes » $c(w)$ de 3.1. Elle est graduée. Si le mot w en l'alphabet $\{0,1\}$ est de longueur d, l'élément $c(w)$ de $\mathcal{O}(\Pi)$ est de degré $-d$, de codegré d. Quand nous noterons $\mathcal{B}'$, affecté de décorations, un ensemble de mots, $\mathcal{B}$, affecté des mêmes décorations, sera l'ensemble correspondant de $c(w)$.

Définition 6.2. — (i) $\mathcal{B}'(2,3)$ *est l'ensemble des mots concaténation de mots* 01 *et* 001 *;*

(ii) $\widetilde{\mathcal{H}}(2,3)$ *est le sous-espace vectoriel de* $\mathcal{O}(\Pi)$ *de base* $\mathcal{B}(2,3)$.

Les restrictions à $\mathbf{M}_{dR}$ des $c(w)$ dans $\mathcal{B}(2,3)$ sont ceux des $(-1)^k\zeta^{\mathbf{m}}(s_1,\ldots,s_k)$ où chaque s_i vaut 2 ou 3.

Pour tout espace vectoriel gradué Z, à composantes homogènes de dimension finie, la *série de Poincaré* de Z est

$$P(Z,t)=\sum \dim(Z_d)t^d. \tag{6.2.1}$$

Si $\widetilde{\mathcal{H}}(2,3)$ est gradué par le codegré, on a

$$P(\widetilde{\mathcal{H}}(2,3),t)=(1-t^2-t^3)^{-1}. \tag{6.2.2}$$

On le vérifie en développant $(1-t^2-t^3)^{-1}=\sum(t^2+t^3)^n$.

6.3. Les mots $w\in\mathcal{B}'(2,3)$ sont caractérisés par

a. ils ne commencent pas par 1 et ne finissent pas par 0 ;

b. ils ne contiennent pas deux 1 consécutifs ;

c. ils ne contiennent pas trois 0 consécutifs.

Que la fonction $f\in\mathcal{O}(\Pi)$ soit combinaison linéaire de $c(w)$ où w vérifie a, b, ou c équivaut respectivement à ce que

a′. pour γ dans Π, $f(\exp(ue_1)\gamma\exp(te_0))$ est indépendant de t et u ;

b′. pour γ, δ dans Π, $f(\gamma\exp(te_1)\delta)$ est de degré $\leqslant 1$ en t ;

c′. pour γ, δ dans Π, $f(\gamma\exp(te_0)\delta)$ est de degré $\leqslant 2$ en t.

Pour le vérifier, noter que les combinaisons linéaires d'éléments de $\Pi(\mathbb{Q})$ sont denses dans $\mathbb{Q}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$, et que si f est interprété comme une forme linéaire continue sur $\mathbb{Q}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$, la condition a' (resp. b', resp. c') équivaut à la même condition, où on permet à γ, δ, d'être arbitraires dans $\mathbb{Q}\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$. Les conditions a', b', c' sont motiviques, car exprimables en terme de composition des chemins, et de (3.3.1). Il faut ici interpréter γ (resp. γ,δ) comme étant dans ${}_1\Pi_0$ (resp. ${}_1\Pi_1$ et ${}_1\Pi_0$, resp. ${}_1\Pi_0$ et ${}_0\Pi_0$).

Pour se convaincre du caractère motivique de a', b', c', on peut observer que ces conditions admettent une formulation « Betti ». On l'obtient en regardant f comme une fonction sur $\pi_1(X;1,0)$, et en remplaçant $\exp(te_0)$ (resp. $\exp(te_1)$) par σ_0^t (resp. σ_1^t) avec $t\in\mathbb{Z}$ et σ_0 (resp. σ_1) un tour positif autour de 0 dans l'espace tangent épointé à $\mathbb{P}^1$ en 0 (resp. 1) (cf. 3.3).

On laisse au lecteur la vérification du lemme suivant :

LEMME 6.4. — *Soit* $f = \sum \lambda_w c(w)$ *dans* $\mathcal{O}(\Pi)$*. Pour que, quels que soient* $\gamma_0, \ldots, \gamma_r$ *dans* Π*,*

$$f(\gamma_0 \exp(te_0)\gamma_1 \exp(te_0) \cdots \exp(te_0)\gamma_r) \tag{6.4.1}$$

soit de degré $\leqslant d$ *en* t*, il faut et suffit que pour tout* w *tel que* $\lambda_w \neq 0$*, la longueur totale d'au plus* r *suites disjointes de* 0 *consécutifs dans* w *soit* $\leqslant d$*.*

6.5. Soit $\mathcal{B}'_\ell(2,3)$ (resp. $\mathcal{B}'_{\leqslant \ell}(2,3)$) l'ensemble des mots w dans $\mathcal{B}'(2,3)$ ayant exactement (resp. au plus) ℓ facteurs 001. Avec la convention de 6.1, soit N_ℓ le sous-espace de $\widetilde{\mathcal{H}}(2,3)$ de base $\mathcal{B}_{\leqslant \ell}(2,3)$. Il résulte de 6.4 que pour que f dans $\widetilde{\mathcal{H}}(2,3)$ soit dans N_ℓ, il faut et il suffit que pour $r = \ell + 1$, et tout choix des γ_i, (6.4.1) soit de degré $\leqslant 2\ell + 1$ en t. Cette propriété est motivique. L'action de G_{dR} sur $\mathcal{O}({}_1\Pi_0)$ respecte donc $\widetilde{\mathcal{H}}(2,3)$ et sa filtration croissante N.

PROPOSITION 6.6. — *L'action de* U_{dR} *sur* $\mathrm{Gr}^N \widetilde{\mathcal{H}}(2,3)$ *est triviale.*

PREUVE – L'algèbre de Lie graduée de U_{dR} est engendrée par des éléments ν_d de degrés impairs $d \geqslant 3$, et si on gradue $\mathcal{O}({}_1\Pi_0)$ par le degré (6.1), l'action est compatible aux graduations. Il suffit de montrer que chaque ν_d agit trivialement. Soit w un mot de longueur n concaténation de mots 01 et de ℓ mots 001. On a $n \equiv \ell(2)$. L'image de $c(w)$ par ν_d est une combinaison linéaire de $c(w')$ avec w' de longueur $n - d$ et concaténation de mots 01 et de $\ell' \leqslant \ell$ mots 001. On a $n - d \equiv \ell'(2)$ et, d étant impair, ℓ et ℓ' n'ont pas la même parité. Que $\ell' < \ell$ prouve 6.6.

6.7. Il résulte de 6.6 que l'action de $\mathrm{Lie}^{\mathrm{gr}} U_{dR}$ sur $N_\ell / N_{\ell-2}$ se factorise par l'abélianisé $\mathrm{Lie}^{\mathrm{gr}} U_{dR}^{\mathrm{ab}}$. L'action de ν_d sur $N_\ell N_{\ell-2}$ ne dépend donc pas, à un facteur près, du choix des générateurs ν_d. Elle est donnée par une application

$$\mathrm{Gr}^N(\nu_d) : \mathrm{Gr}^N_\ell(\widetilde{\mathcal{H}}(2,3)) \to \mathrm{Gr}^N_{\ell-1}(\widetilde{\mathcal{H}}(2,3)). \tag{6.7.1}$$

L'espace vectoriel $\mathrm{Gr}^N_\ell(\widetilde{\mathcal{H}}(2,3))$ admet pour base l'image de $\mathcal{B}_l(2,3)$ (6.5). Il est gradué par le codegré. Soit $\mathcal{B}'_\ell(2,3)_n$ la partie de $\mathcal{B}'_\ell(2,3)$ formée des mots de longueur n. Notons $\mathrm{Gr}^N_\ell(\widetilde{\mathcal{H}}(2,3))_n$ le facteur direct de codegré n de $\mathrm{Gr}^N_\ell(\widetilde{\mathcal{H}}(2,3))$. Il a pour base l'image de $\mathcal{B}_\ell(2,3)_n$. Il n'est non nul que pour $n \equiv \ell(2)$ et $n - 3\ell \geqslant 0$.

Les morphismes (6.7.1) induisent

$$\sum \mathrm{Gr}^N(\nu_d) : \mathrm{Gr}^N_\ell(\widetilde{\mathcal{H}}(2,3))_n \to \bigoplus_d \mathrm{Gr}^N_{\ell-1}(\widetilde{\mathcal{H}}(2,3))_{n-d}, \tag{6.7.2}$$

où il suffit de sommer sur d impair vérifiant $3 \leqslant d \leqslant 3 + n - 3\ell$. Le membre de gauche de (6.7.2) a une base indexée par $\mathcal{B}'_\ell(2,3)_n$. Celui de droite a une base indexée par la réunion des $\mathcal{B}'_{\ell-1}(2,3)_{n-d}$. Si $l \geqslant 1$, on obtient une bijection entre ces ensembles de mots en associant au mot $w \in \mathcal{B}'_{\ell}(2,3)_n$ le mot $\bar{w}$ qui s'en déduit en ôtant de w son $(001)(01)\cdots(01)$ final.

F. Brown calcule les morphismes (6.7.2) et prouve le

Théorème 6.8. — *Pour $\ell \geqslant 1$, les morphismes* (6.7.2) *sont des isomorphismes.*

La stratégie qu'il utilise pour prouver 6.8 sera expliquée au §8.

Corollaire 6.9. — *Le morphisme de restriction à $\mathbf{M}_{dR}$:*

$$\textit{restr}: \quad \widetilde{\mathcal{H}}(2,3) \to \mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR}) \tag{6.9.1}$$

est injectif.

Appliquant (6.2.2), on déduit de 6.9 le

Corollaire 6.10. — *La série de Poincaré de $\mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR})$ vérifie*

$$P(\mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR}),t) \geqslant (1-t^2-t^3)^{-1} \qquad \text{(inégalité terme à terme)}, \tag{6.10.1}$$

avec égalité si et seulement si (6.9.1) est bijectif.

Admettons 6.8, et prouvons 6.9.

Lemme 6.11. — *Le morphisme (6.9.1) est injectif sur N_0.*

Preuve — Le morphisme induit par (6.9.1) de N_0 dans $\mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR})$ est compatible aux graduations par le codegré. Il suffit donc de vérifier son injectivité séparément en chaque codegré. Les $c((01)^n)$ forment une base de N_0, et $c((01)^n)$ est de codegré $2n$. Ces codegrés étant distincts, il suffit de vérifier que pour chaque n la restriction de $c((01)^n)$ à $\mathbf{M}_{dR}$ est non nulle. La valeur de $c((01)^n)$ en dch $\in \mathbf{M}_{dR}(\mathbb{C})$ est $(-1)^n\zeta(2^{\{n\}})$, où $\zeta(2^{\{n\}}) = \zeta(2,\ldots,2)$ avec n « 2 ». On conclut en observant que tout nombre multizêta est > 0, donc non nul.

Remarque 6.12. — Développant les identités dues à Euler

$$\prod_{n>0}(1-z^2/n^2) = \sin(\pi z)/\pi z = \sum(-1)^n(\pi z)^{2n}/(2n+1)!,$$

on voit que $\zeta(2^{\{n\}}) = \pi^{2n}/(2n+1)!$. Que $\zeta(2^{\{n\}})$ soit un multiple rationnel de π^{2n} résultait déjà de ce que le sous-espace motivique N_0 de $\mathcal{O}({}_1\Pi_0)$ est fixe sous U_{dR}, donc la réalisation dR d'une somme de motifs de Tate. Ceci force $\zeta(2^{\{n\}})$ à être une période de $\mathbb{Q}(-2n)$.

6.13. Preuve de 6.8 $\Rightarrow$ 6.9. Filtrons l'image $\mathrm{restr}(\widetilde{\mathcal{H}}(2,3))$ de $\widetilde{\mathcal{H}}(2,3)$ dans $\mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR})$ par les images des N_ℓ. Il suffit de montrer l'injectivité de

$$\widetilde{\mathcal{H}}(2,3) \to \mathrm{restr}(\widetilde{\mathcal{H}}(2,3)) \tag{6.13.1}$$

après passage aux gradués. Prouvons par récurrence sur $\ell \geqslant 0$ l'injectivité sur $\mathrm{Gr}_\ell^N(\widetilde{\mathcal{H}}(2,3))$. Le lemme 6.11 prouve cette injectivité pour $\ell = 0$. Si $\ell > 0$, considérons le morphisme

$$\sum \nu_d : \mathrm{Gr}_\ell^N \widetilde{\mathcal{H}}(2,3) \to \oplus\ \mathrm{Gr}_{\ell-1}^N \widetilde{\mathcal{H}}(2,3),$$

où le but est une somme de copies de $\oplus\,\mathrm{Gr}_{\ell-1}^N \widetilde{\mathcal{H}}(2,3)$ indexées par les entiers impairs $d \geqslant 3$. Le théorème 6.8 assure que ce morphisme est bijectif. Le morphisme (6.9.1) commute aux dérivations ν_d. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gr}_\ell^N \widetilde{\mathcal{H}}(2,3) \arrow[r, "\mathrm{Gr}_\ell^N(6.13.1)"] \arrow[d, "\wr"', "\sum \nu_d"] & \mathrm{Gr}_\ell^N \mathrm{restr}(\widetilde{\mathcal{H}}(2,3)) \arrow[d, "\sum \nu_d"] \\
\oplus\, \mathrm{Gr}_{\ell-1}^N \widetilde{\mathcal{H}}(2,3) \arrow[r, "\mathrm{Gr}_{\ell-1}^N(6.13.1)"] & \oplus\, \mathrm{Gr}_{\ell-1}^N \mathrm{restr}(\widetilde{\mathcal{H}}(2,3))
\end{tikzcd}$$

est donc commutatif. L'hypothèse de récurrence assure que $\mathrm{Gr}_{\ell-1}^N(6.13.1)$ est injectif. La première flèche verticale étant injective, $\mathrm{Gr}_\ell^N(6.13.1)$ l'est aussi.

7. STRUCTURE DE L'ADHÉRENCE D'ORBITE M_{dR}

7.1. Considérons le groupoïde des ${}_b\Pi_a$ pour $a, b \in \{0,1\}$, muni de $e_0 \in \mathrm{Lie}\,{}_0\Pi_0$ et de $e_1 \in \mathrm{Lie}\,{}_1\Pi_1$. Soit V_{dR} le schéma en groupe des automorphismes de cette structure. L'action de U_{dR} sur le groupoïde des ${}_b\Pi_a$ se factorise par un morphisme

$$I\colon\ U_{dR} \to V_{dR}. \tag{7.1.1}$$

On note IU_{dR} l'image de U_{dR} dans V_{dR}.

Le groupe des automorphismes qui ne respectent $e_0 \in \mathrm{Lie}\,{}_0\Pi_0$ et $e_1 \in \mathrm{Lie}\,{}_1\Pi_1$ qu'à un facteur près, le même pour e_0 et e_1, est un produit semi-direct $\mathbb{G}_m \ltimes V_{dR}$. On note $\circ$ sa loi de groupe, et τ l'inclusion de $\mathbb{G}_m$. L'action de $\mathbb{G}_m$ sur les ${}_b\Pi_a$, est celle du sous-groupe $\mathbb{G}_m$ de G_{dR}. Elle correspond aux graduations.

D'après [2] 5.9,

$$v \longmapsto v({}_1 1_0)\colon\ V_{dR} \to {}_1\Pi_0 \tag{7.1.2}$$

est un isomorphisme de schémas. Cet isomorphisme identifie V_{dR} à Π, muni d'une nouvelle loi de groupe, notée $\circ$. L'action τ de $\mathbb{G}_m$ qui définit la graduation de $\mathcal{O}({}_1\Pi_0)$ fixe ${}_1 1_0$. Il en résulte que (7.1.2) est compatible aux graduations. Puisqu'il envoie élément neutre sur élément neutre, il définit un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués

$$\mathrm{Lie}^{\mathrm{gr}} V_{dR} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}^{\mathrm{gr}} \Pi. \tag{7.1.3}$$

L'algèbre de Lie graduée $\mathrm{Lie}^{\mathrm{gr}} V_{dR}$ est ainsi identifée à $\mathrm{Lie}^{\mathrm{gr}}\Pi$, muni d'un nouveau crochet, le *crochet de Ihara* $\{,\}$.

7.2. Notons $x \mapsto \gamma_{b,a}\langle x\rangle$ l'action sur ${}_b\Pi_a$ de γ dans $(\Pi, \circ)$. Elle se calcule comme suit. L'action sur ${}_a\Pi_a$ respecte la structure de groupe. Pour $a = 0$, elle est induite par l'automorphisme

$$\gamma_{00}\colon\ e_0 \longmapsto e_0,\ \ e_1 \longmapsto \gamma^{-1}e_1\gamma \tag{7.2.1}$$

de l'algèbre enveloppante complétée $\mathbb{Q}\!\ll e_0, e_1\gg$ de $\mathrm{Lie}\,\Pi$. Pour le vérifier, noter que $e_0 \in \mathrm{Lie}\,{}_0\Pi_0$ et $e_1 \in \mathrm{Lie}\,{}_1\Pi_1$ sont fixes par définition de V_{dR}. Écrivant ${}_0(e_1)_0 = ({}_11_0)^{-1}{}_1(e_1)_1({}_11_0)$, on obtient comme promis

$${}_0(e_1)_0 \longmapsto \gamma^{-1}{}_1(e_1)_1\gamma.$$

L'automorphisme γ_{10} de ${}_1\Pi_0$ est induit par l'automorphisme γ_{00}-semi-linéaire

$$\gamma_{10}\colon\ x \longmapsto \gamma\,\gamma_{00}\langle x\rangle \tag{7.2.2}$$

du $\mathbb{Q}\!\ll e_0, e_1\gg$-module à droite $\mathbb{Q}\!\ll e_0, e_1\gg$. Le vérifier comme ci-dessus, partant de ${}_1x_0 = {}_11_0\ {}_0x_0$. Puisque $\gamma \circ x$ envoie ${}_11_0$ sur $\gamma_{10}\,\langle {}_1x_0\rangle$, c'est aussi

$$\gamma_{10}\colon\ x \longmapsto \gamma \circ x, \qquad \text{et donc} \tag{7.2.3}$$

$$x \circ y = x\,x_{00}\langle y\rangle\,. \tag{7.2.4}$$

7.3. Regardons, par $\mathrm{comp}_{dR,B}$, $\pi_1(X; b, a)_B$ comme une $\mathbb{Q}$-structure sur le complexifié de $\pi_1(X; b, a)_{dR} = {}_b\Pi_a$, la *$\mathbb{Q}$-structure de Betti*, notée $({}_b\Pi_a)_B$. Pour cette nouvelle $\mathbb{Q}$-structure, $2\pi i e_0$ dans $\mathrm{Lie}\,{}_0\Pi_{0\mathbb{C}}$ et $2\pi i e_1$ dans $\mathrm{Lie}\,{}_1\Pi_{1\mathbb{C}}$ sont rationnels : leurs exponentielles sont les σ_0 et σ_1 de 6.3. On en déduit le

Lemme 7.4. — *Soit ch un point rationnel de $({}_1\Pi_0)_B$. Regardons son image par* $\mathrm{comp}_{dR,B}$*, encore notée* ch*, comme un point complexe de* $(\Pi, \circ)$*. Alors, le point complexe* $\mathrm{ch} \circ \tau(2\pi i)$ *de* $\mathbb{G}_m \ltimes V_{dR} = \mathbb{G}_m \ltimes (\Pi, \circ)$ *transforme la $\mathbb{Q}$-structure de ${}_b\Pi_a$ en sa $\mathbb{Q}$-structure de Betti.*

7.5. Soit $a = u\,\tau(2\pi i) \in U_{dR}(\mathbb{R})\tau(2\pi i) \subset G_{dR}(\mathbb{C})$ comme en (5.8.3). Si ch est comme en 7.4, tant $\mathrm{ch}\,\tau(2\pi i)$ que $I(u)\tau(2\pi i)$ transforment la $\mathbb{Q}$-structure des ${}_b\Pi_a$ en leur $\mathbb{Q}$-structure de Betti. Si $\gamma \in V_{dR}(\mathbb{C}) = \Pi(\mathbb{C})$ est défini par

$$\mathrm{ch} \circ \tau(2\pi i) = I(u) \circ \tau(2\pi i) \circ \gamma, \tag{7.5.1}$$

γ respecte la $\mathbb{Q}$-structure, donc est dans $V_{dR}(\mathbb{Q}) = \Pi(\mathbb{Q})$. Notant encore τ l'action de $\mathbb{G}_m$ sur Π, on peut récrire (7.5.1) sous la forme

$$\mathrm{ch} = I(u) \circ \tau(2\pi i)(\gamma).$$

Appliquons ceci au droit chemin dch :

LEMME 7.6. — *Pour u comme ci-dessus, il existe γ dans $\Pi(\mathbb{Q})$ tel que*

$$\mathrm{dch} = I(u) \circ \tau(2\pi i)(\gamma). \tag{7.6.1}$$

Tout tel γ vérifie

$$\tau(-1)(\gamma) = \gamma. \tag{7.6.2}$$

PREUVE — (7.6.2) résulte de ce que u et dch, et donc aussi $\tau(2\pi i)(\gamma)$, sont réels.

7.7. Appliquons (7.2.3) à (7.6.1). On obtient que l'orbite de dch sous $U_{dR}(\mathbb{C})$ est

$$IU_{dR}(\mathbb{C}) \circ \tau(2\pi i)(\gamma) \subset \Pi_{dR}(\mathbb{C}).$$

Pour obtenir l'orbite sous $G_{dR} = \mathbb{G}_m \ltimes U_{dR}$, il suffit de remplacer $\tau(2\pi i)(\gamma)$ par son orbite $\tau(\mathbb{C}^*)(\gamma)$ sous $\mathbb{G}_m$:

$$G_{dR}(\mathbb{C})(\mathrm{dch}) = IU_{dR}(\mathbb{C}) \circ \tau(\mathbb{C}^*)(\gamma). \tag{7.7.1}$$

En effet, IU_{dR} est déjà stable sous $\mathbb{G}_m$. Ainsi qu'on le savait déjà, l'orbite (7.7.1) est, au sens dR, définie sur $\mathbb{Q}$. C'est l'ensemble des points complexes de

$$IU_{dR} \circ \tau(\mathbb{G}_m)(\gamma) \subset \Pi. \tag{7.7.2}$$

Dans (7.7.2), le produit est celui de $(\Pi, \circ) = V_{dR}$, et le résultat est regardé comme un sous-schéma de ${}_1\Pi_0$.

Dans $\mathbb{Q}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$, on a $\gamma = \sum c_w.w$. D'après (7.6.2), la somme ne porte que sur des monômes w de degré pair. Si $\rho(\lambda) := \sum \lambda^{\deg(w)/2} c_w w$, $\rho(\lambda)$ est défini pour $\lambda \in \mathbb{G}_a$ et vérifie

$$\rho(\lambda^2) = \tau(\lambda)(\gamma). \tag{7.7.3}$$

PROPOSITION 7.8. — *Le morphisme de schémas*

$$IU_{dR} \times \mathbb{G}_a \to \Pi\colon\ (u, \lambda) \longmapsto u \circ \rho(\lambda) \tag{7.8.1}$$

induit un isomorphisme de $IU_{dR} \times \mathbb{G}_a$ avec $\mathbf{M}_{dR} \subset {}_1\Pi_0$ défini en 4.2.

PREUVE — Si u est dans $IU_{dR} \subset V_{dR} = \Pi \subset \mathbb{Q}\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle^*$, on peut l'écrire $u = 1 + \sum e_w w$, où la somme ne porte que sur les monômes de degré $\geqslant 3$. C'est une conséquence de ce que $\mathrm{Lie}^{\mathrm{gr}} U_{dR}$ est nul en degré < 3. Le coefficient de e_0e_1 dans $u \circ \rho(\lambda)$ coïncide donc avec celui de $\rho(\lambda)$. Le coefficient de e_0e_1 dans dch est $-\frac{\pi^2}{6} = \frac{(2\pi i)^2}{24}$. D'après (7.7.3), celui de γ est donc $1/24$, et celui de $\rho(\lambda)$ est $\lambda/24$. Partant de $x = u \circ \rho(\lambda)$, on retrouve λ comme étant $24\, c(e_0e_1)(x)$, que x soit de la forme $u \circ \rho(\lambda)$ équivaut à ce que u défini par $x = u \circ \rho(24\, c(e_0e_1)(x))$ soit dans IU_{dR}. C'est une condition fermée, et (7.8.1) est un isomorphisme avec un sous-schéma fermé de Π, dans lequel l'orbite de dch est dense. Ceci prouve 7.8.

7.9. Nous noterons D l'image de $\mathbb{G}_a$ par ρ. On a donc $\rho\colon\ \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} D$, et 7.8 dit que la loi de groupe $\circ$ induit un isomorphisme

$$\circ\colon\ IU_{dR} \times D \xrightarrow{\sim} \mathbf{M}_{dR}. \tag{7.9.1}$$

Cet isomorphisme est compatible aux graduations des algèbres affines, si $\mathcal{O}(D) = \mathbb{Q}[\lambda]$ est gradué en donnant à λ le degré -2 (codegré 2).

7.10. D'après 6.6 appliqué à N_0, les $(-1)^n c((01)^n)$, et donc leurs restrictions $\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{n\}})$ à $\mathbf{M}_{dR}$, sont U_{dR}-invariantes. Transportée de $\mathbf{M}_{dR}$ à $IU_{dR} \times D$ par (7.9.1), l'action de $u \in U_{dR}$ est $(a, \lambda) \mapsto (I(u)a, \lambda)$. Vues comme fonctions sur $IU_{dR} \times D$, les $\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{n\}})$ sont donc les images inverses de fonctions sur D. À un facteur près, il n'y a qu'une telle fonction en chaque degré pair. Pour déterminer laquelle est $\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{n\}})$, il suffit de tester sur dch. Posons $\pi^2_{\mathbf{m}} := 6\zeta^{\mathbf{m}}(2)$, une définition suggérée par l'identité $\zeta(2) = \pi^2/6$, et $w^{2n}_{\mathbf{m}} := (\pi^2_{\mathbf{m}})^n$. D'après 6.12, on a :

Lemme 7.11. — (i) *Pour chaque n,*

$$\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{n\}}) = \pi^{2n}_{\mathbf{m}}/(2n+1)!\,.$$

(ii) *IU_{dR} est le sous-schéma de $\mathbf{M}_{dR}$ défini par $\pi^2_{\mathbf{m}} = 0$.*

Proposition 7.12. — *Pour chaque entier $n \geqslant 1$,*

(i) *$\zeta^{\mathbf{m}}(2n)$ est un multiple rationnel de $\pi^{2n}_{\mathbf{m}}$ (quel multiple, on le voit en évaluant sur* dch*) ;*

(ii) *en tant que fonction sur $IU_{dR} \times D$, $\zeta^{\mathbf{m}}(2n+1)$ est l'image inverse d'une fonction sur IU_{dR}, et celle-ci est un homomorphisme non nul de IU_{dR} dans $\mathbb{G}_a$;*

(iii) *sur les groupes rendus abéliens, les $\zeta^{\mathbf{m}}(2n+1)$ pour $n \geqslant 1$ induisent un isomorphisme*

$$U^{\mathrm{ab}}_{dR} \xrightarrow{\sim} IU^{\mathrm{ab}}_{dR} \xrightarrow{\sim} (\text{produit de } \mathbb{G}_a).$$

Preuve (esquisse) — La *filtration de profondeur* de Lie Π est la filtration par les sous-algèbres « degré en $e_1 \geqslant i$ ». On note $D^i\Pi$ les sous-groupes correspondants. Si un sous-groupe Q de Π, vu comme sous-groupe de ${}_0\Pi_0$, est stable sous V_{dR}, il résulte de (7.2.4) que c'est aussi un sous-groupe de $(\Pi, \circ)$. Ceci s'applique aux $D^i\Pi$.

Le sous-groupe $D^1\Pi$ est défini par l'équation $c(0) = 0$. Il contient le groupe dérivé Π', qui est défini par $c(0) = c(1) = 0$, donc contient tant IU_{dR} que dch. Le quotient $D^1\Pi/D^2\Pi$ est aussi le quotient $D^1\Pi/D^2\Pi$ pour la loi de groupe $\circ$. Il est abélien, et les $c(0^{\{n-1\}}1)$ définissent un isomorphisme de $D^1\Pi/D^2\Pi$ avec un produit de copies de $\mathbb{G}_a$.

Parce que $IU_{dR} \subset (\Pi, \circ)$ a une algèbre de Lie engendrée en degré impair, si n est pair, $c(0^{\{n-1\}}1)$ est nul sur IU_{dR}, $\zeta^{\mathbf{m}}(n)$, transporté par (7.9.1) en une fonction sur $IU_{dR} \times D$, est l'image inverse d'une fonction sur D, et (i) se prouve par les arguments de 7.10.

Par (7.6.2), les $c(0^{\{n-1\}}1)$ sont nuls sur D pour n impair. Que $\zeta(n) \neq 0$ assure que, pour n impair $\geqslant 3$, ils ne sont pas nuls sur IU_{dR}. Ceci prouve (ii).

L'assertion (iii) résulte de (ii) et de ce que l'algèbre de Lie graduée de U_{dR} a un générateur en chaque degré impair $\geqslant 3$.

Corollaire 7.13. — *Quels que soient les entiers $a, b \geqslant 0$, il existe des nombres rationnels $\alpha_{a,b,r}$ $(1 \leqslant r \leqslant a+b+1)$, uniques, tels que*

$$\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{b\}}3\,2^{\{a\}}) = \sum_{r=1}^{a+b+1} \alpha_{a,b,r}\zeta^{\mathbf{m}}(2r+1)\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{a+b+1-r\}}). \tag{7.13.1}$$

Preuve — Regardons, par (7.9.1), $\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{b\}}3\,2^{\{a\}})$ comme une fonction sur $IU_{dR} \times D$. Développons-la selon les puissances d'une coordonnée sur D : $\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{b\}}3\,2^{\{a\}}) = \sum u_{2r+1}\pi_{\mathbf{m}}^{2(a+b+1-r)}$, avec u_{2r+1} de codegré $2r+1$ sur IU_{dR}. D'après 6.6 et 7.9, un translaté à gauche de u_{2r+1} ne diffère de u_{2r+1} que par l'addition d'une constante. C'est donc un homomorphisme de IU_{dR} dans le groupe additif. Étant de poids $2r+1$, c'est d'après 7.12 un multiple rationnel de $\zeta^{\mathbf{m}}(2r+1)$ et 7.13 résulte de 7.11.

Deus ex Machina 7.14 (D. Zagier [6]). — *Posons $A^r_{a,b} = \binom{2r}{2a+2}$ et $B^r_{a,b} = (1-2^{-2r})\binom{2r}{2b+1}$. Alors*

$$\zeta(2^{\{b\}}3\,2^{\{a\}}) = 2\sum(-1)^r(A^r_{ab} - B^r_{ab})\zeta(2r+1)\zeta(2^{\{a+b+1-r\}}). \tag{7.14.1}$$

Ce théorème suggère que les $\alpha_{a,b,r}$ de (7.13.1) sont les $2(-1)^r(A^r_{a,b} - B^r_{a,b})$. Comment le prouver en partant de 7.14 sera expliqué au §8.

7.15. L'algèbre affine $\mathcal{O}(U_{dR})$ de U_{dR} est en dualité, au sens gradué, avec l'algèbre enveloppante de $\mathrm{Lie}^{\mathrm{gr}}(U_{dR})$. Cette algèbre enveloppante est une algèbre associative libre en des générateurs de degrés les entiers impairs $\geqslant 3$. La série de Poincaré de $\mathcal{O}(U_{dR})$, gradué par le codegré, est donc

$$\begin{aligned} P(\mathcal{O}(U_{dR}), t) &= \sum_{a \geqslant 0} \Big(\sum_{n \geqslant 1} t^{2n+1} \Big)^a = \Big(1 - \sum_{n \geqslant 1} t^{2n+1} \Big)^{-1} \\ &= (1 - (t^3/(1-t^2)))^{-1} = (1-t^2)/(1-t^2-t^3). \end{aligned}$$

Si l'algèbre affine du groupe additif $\mathbb{G}_a$, de coordonnée λ, est graduée en donnant à λ le codegré 2, on a $P(\mathcal{O}(\mathbb{G}_a), t) = (1-t^2)^{-1}$ et

$$P(\mathcal{O}(U_{dR} \times \mathbb{G}_a), t) = (1 - t^2 - t^3)^{-1}.$$

L'algèbre affine $\mathcal{O}(IU_{dR})$ est une sous-algèbre graduée de $\mathcal{O}(U_{dR})$. Par 7.9, on a donc

Proposition 7.16. — *La série de Poincaré de $\mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR})$, gradué par le codegré, vérifie*

$$P(\mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR}), t) \leqslant (1-t^2-t^3)^{-1} \quad \text{(inégalité terme à terme)}, \tag{7.16.1}$$

avec égalité si et seulement si le morphisme $I\colon U_{dR} \to IU_{dR}$ est un isomorphisme, i.e. si U_{dR} agit fidèlement sur $\pi_1(X; 1, 0)_{dR}$.

Comparant avec 6.10, on obtient le

Théorème 7.17. — (i) *U_{dR} agit fidèlement sur ${}_1\Pi_0$.*
(ii) *Le morphisme de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\widetilde{\mathcal{H}}(2,3) \to \mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR})$ est un isomorphisme.*

L'algèbre affine de $\pi_1(X; 1, 0)_{\mathrm{mot}}$ contient en sous-quotient un $\mathbb{Q}(-1)$. Il résulte donc de (i) que l'action de G_{dR} sur l'algèbre affine de $\pi_1(X; 1, 0)_{dR}$ est fidèle. La théorie des catégories tannakiennes donne qu'en conséquence de (i), on a le

Corollaire 7.18. — *L'algèbre affine $\mathcal{O}(\pi_1(X; 1, 0)_{\mathrm{mot}})$, qui est un Ind-objet de $MT(\mathbb{Z})$, engendre la catégorie tannakienne $MT(\mathbb{Z})$.*

Plus précisément, tout motif de Tate mixte à bonne réduction sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ se déduit de sous-objets dans $MT(\mathbb{Z})$ de $\mathcal{O}(\pi_1(X; 1, 0)_{\mathrm{mot}})$ par les opérations de produits tensoriels, sommes directes, duaux et sous-quotients.

L'assertion (ii) de 7.17 équivaut à dire que les $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$ avec $s_i \in \{2, 3\}$ forment une base de $\mathcal{O}(\mathbf{M}_{dR})$.

8. ESQUISSES DE PREUVES

8.1. Le schéma en groupe $V_{dR} = (\Pi, \circ)$ agit sur ${}_1\Pi_0$ (7.1), et donc sur son algèbre affine $\mathcal{O}({}_1\Pi_0)$. Cette action est l'action de $(\Pi, \circ)$ sur $\mathcal{O}(\Pi)$ par translations à gauche (7.2.3) : x transforme f en $y \mapsto f(x^{-1} \circ y)$. Ces actions sont données par (7.2.1) (7.2.2). Dérivant ces formules, on obtient l'action de $\mathrm{Lie}(V_{dR}) = (\mathrm{Lie}\,\Pi, \{\ ,\ \})$ sur $\mathcal{O}({}_1\Pi_0)$, et dualement la coaction de la coalgèbre de Lie. Celle-ci est m/m^2, pour m l'idéal des fonctions nulles à l'élément neutre 1, et la coaction est la projection sur $m/m^2 \otimes \mathcal{O}(\Pi)$ de $f \mapsto f(x^{-1} \circ y) - f(y)$ dans $m \otimes \mathcal{O}(\Pi) \subset \mathcal{O}(\Pi \times \Pi)$.

Goncharov a donné une formule commode pour cette coaction (voir [5] théorème 1.2). Pour w un mot de l'alphabet $\{0, 1\}$, considérons les sous-mots $c\,I\,d$ de $1w0$, avec I non vide : on considère toutes les décompositions $w = w'Iw''$ de w, avec I non vide, et c, d sont les lettres mitoyennes à I dans $1w0$. Pour chaque décomposition, posons $w \setminus I := w'w''$. Formule pour la coaction :

$$c(w) \longmapsto -\sum p_{cd}(I) \otimes c(w \setminus I) \qquad \text{où} \tag{8.1.1}$$

$p_{cd}(I)$ est la projection dans m/m^2 de l'élément suivant de $m \subset \mathcal{O}(\Pi)$:

$$p_{cd}(I) = \text{projection de} \begin{cases} 0 \text{ si } c = d \\ c(I) \text{ si } c = 1,\ d = 0 \\ \text{l'antipode } c(I)^* \text{ de } c(I) \text{ si } c = 0,\ d = 1\,, \end{cases} \tag{8.1.2}$$

où si $I = a_1 \cdots a_k$, l'antipode est $(-1)^k c(a_k \cdots a_1)$.

8.2. L'action de U_{dR} sur $\mathcal{O}({}_1\Pi_0)$ se factorise par celle de $IU_{dR} \subset (\Pi, \circ)$, et pour obtenir la coaction de la coalgèbre de Lie, il reste à composer (8.1.1) avec

$$\mathrm{coLie}(\Pi, \circ) \to \mathrm{coLie}(IU_{dR}) \to \mathrm{coLie}(U_{dR}).$$

Les $c(I)$ et $c(I)^*$ de (8.1.2) n'importent plus que par leur restriction à $\mathbf{M}_{dR}$, prise mod $\pi_{\mathbf{m}}^2$ et le carré de l'idéal maximal en 1.

Nous choisirons les générateurs ν_{2r+1} de l'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}^{\mathrm{gr}}(U_{dR})$ de sorte que, notant encore ν_{2r+1} l'image de ν_{2r+1} dans l'espace tangent de $IU_{dR} \subset \Pi$ en 1, on ait

$$\langle \nu_{2r+1}, d\zeta^{\mathbf{m}}(2r+1) \rangle = 1$$

(possible par 7.12(ii)). Ceci détermine l'image de ν_{2r+1} dans $\mathrm{Lie}^{\mathrm{gr}}(U_{dR}^{ab})$. Si $r = a + b + 1$ et que $\alpha_{a,b}$ est le coefficient de $\zeta^{\mathbf{m}}(2r+1)$ dans (7.13.1), on a alors

$$\left\langle \nu_{2r+1}, d\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{b\}} 3\, 2^{\{a\}}) \right\rangle = \alpha_{a,b}.$$

Proposition 8.3. — *La formule* (7.14.1) *reste vraie avec* ζ *remplacé par* $\zeta^{\mathbf{m}}$.

Preuve — On procède par récurrence sur $a+b$. Si $a+b=0$, l'identité $(7.14.1)^{\mathbf{m}}$ à prouver se réduit à $\zeta^{\mathbf{m}}(3)=\zeta^{\mathbf{m}}(3)$. Supposons $(7.14.1)^{\mathbf{m}}$ vraie pour $a+b<N$. Ceci assure que, pour $a+b<N$ et $r=a+b+1$, on a, avec les notations de 7.14,

$$\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{b\}}3\,2^{\{a\}})=2(-1)^r(A^r_{ab}-B^r_{ab})\zeta^{\mathbf{m}}(2r+1) \text{ sur } IU_{dR}. \tag{8.3.1}$$

Pour $a+b=N$, si les $\alpha_{a,b,r}$ sont définis comme en 7.13, on a, pour l'action de ν_{2r+1}

$$\nu_{2r+1}\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{b\}}3\,2^{\{a\}})=-\alpha_{a,b,r}\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{a+b+1-r\}}): \tag{8.3.2}$$

appliquer 7.12. Pour $r\leqslant N$, calculons le membre de gauche par (8.1.1) (8.1.2). Il faut sommer sur les sous-mots I de $w=(01)^b(001)(01)^a$, de longueur $2r+1$, et entourés de $0,1$ ou $1,0$ dans $1w0$. Les $c(w\setminus I)$, restreints à $\mathbf{M}_{dR}$, sont $\pm\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{a+b+1-r\}})$. Les $c(I)$ ou $c(I)^*$ qui apparaissent dans (8.1.2), restreints à $\mathbf{M}_{dR}$, sont des $\pm\zeta^{\mathbf{m}}(2^{\{b'\}}3\,2^{\{a'\}})$ auxquels (8.3.1) s'applique par l'hypothèse de récurrence, ou un $c((01)^m0)$ qui, sur Π', s'exprime par (3.5.2) comme somme de $\zeta(2^{\{b'\}}3\,2^{\{a'\}})$ auxquels (8.3.1) s'applique. Ceci permet le calcul des $\alpha_{a,b,r}$ pour $r\leqslant N$, et on trouve qu'ils ont la valeur espérée. Ceci ne laisse inconnu dans (7.13.1) que le coefficient $\alpha_{a,b,a+b+1}$. On le détermine en évaluant en dch et en appliquant (7.14.1).

8.4. Armé de (8.3.1), on peut maintenant calculer par (8.1.1) (8.1.2) les morphismes (6.7.1). Pour prouver 6.8, l'idée est que, dans la matrice obtenue pour (6.7.2), les termes dominants, au sens 2-adique, proviennent du 2^{-2r} qui figure dans B^r_{ab} (7.14). Si, au but et à la source de (6.7.2), on range les vecteurs de base dans des ordres convenables qui se correspondent par la bijection définie en 6.7, et qu'au but on multiplie les vecteurs de base par des puissances de 2 convenables, la matrice de (6.7.2) est une matrice carrée à coefficients entiers, dont la réduction modulo 2 est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Ceci assure qu'elle est inversible.

Remerciements.— Je remercie F. Brown, P. Cartier et H. Esnault de remarques et de corrections qui m'ont permis d'améliorer ce texte.

RÉFÉRENCES

[1] F. BROWN – *Mixed Tate motives over* $\mathbb{Z}$, Annals of Math., to appear in vol. **175**.

[2] P. DELIGNE, A. B. GONCHAROV – *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **38** (2005), 1–56.

[3] L. EULER – *De summis serierum reciprocarum*, Comm. Acad. Sci. Petropol. **7** (1734/5) p.123–134, in Opera Ommia Ser. I, vol. 14, p. 73–86 (voir aussi dans le même volume des Opera Omnia le mémoire 61, p. 138–155, pour une preuve irréprochable, et le mémoire 130, p. 407–462, pour une approximation de $\zeta(3)$ (p. 440)).

[4] L. EULER – *Meditationes circa singulare serierum genus*, Novi Comm. Acad. Sci. Petropol. **20** (1775), p.140–186, in Opera Omnia Ser. I, vol. 15, Teubner, Berlin (1927), p. 217–267.

[5] A. B. GONCHAROV – *Galois symmetries of fundamental groupoids and non commutative geometry*, Duke Math. J. (2005), 1–56.

[6] D. ZAGIER – *Evaluation of the multiple zeta values* $\zeta(2,\ldots,2,3,2,\ldots,2)$, Annals of Math., to appear in vol. **175**.

Pierre DELIGNE

School of Mathematics
Institute for Advanced Study
Einstein Drive
Princeton, N.J. 08540 - U.S.A.
E-mail : `deligne@math.ias.edu`